



Cálculo 1

Lista de Exercícios – Semana 02

Temas abordados: Limites no ponto (conceito intuitivo e formal)

Seções do livro: 2.1 a 2.4

- 1) Suponha $f(x) > 0$ para todo $x \neq 2$ e $f(2) = -3$. Decida sobre a veracidade de cada uma das afirmações abaixo, justificando caso ela seja verdadeira ou apresentando um contra-exemplo caso seja falsa.

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ não existe (b) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$ (c) Se existir, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ é positivo.

- 2) Calcule os limites abaixo (veja [Texto 1](#)).

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} (-3x^2 + 3x + 5)$ (b) $\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2s^2 + 3s - 4}{4s - 4}}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - 2x}{|x - 4|}$
(d) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{8 - 2x}{|x - 4|}$ (e) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x - 1|}{x - 1}$ (f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 1|}{x - 1}$

- 3) Dadas $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{se } x \leq 1, \\ x + 1 & \text{se } x > 1, \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1, \\ 2 & \text{se } x > 1, \end{cases}$ resolva os itens abaixo.

- (a) Esboce os gráficos de f e g .
(b) Decida sobre a existência dos limites $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.
(c) Dê a expressão de $h(x) = f(x)g(x)$ e verifique se existe $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$.

- 4) Limites do tipo $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ com o numerador e o denominador se aproximando de zero são chamados de *indeterminações do tipo* $0/0$ ([veja vídeo](#)). Eles são delicados porque não podemos aplicar a regra do quociente. Se f e g são polinômios, então $f(a) = g(a) = 0$, e portanto $x = a$ é uma raiz do numerador e do denominador. Deste modo, podemos fatorá-los na forma $(x - a)p(x)$, com p sendo um polinômio de grau menor. Em alguns casos, isso permite eliminar a indeterminação, como no exemplo abaixo

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{6 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x - 1)}{-2(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 1}{-2} = \frac{2}{-2} = -1.$$

Utilize a ideia acima para calcular os limites a seguir.

(a) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 + 2z}{z}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 6x + 4}{2 - x}$ (c) $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - 1}{t^3 - 1}$

Dica: para fatorar o polinômio $(t^3 - 1)$ divida-o por $(t - 1)$. ([veja vídeo](#))

- 5) O limite trigonométrico fundamental nos diz que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ ([veja Texto 3](#) e/ou [vídeo](#)). Use essa informação para calcular os limites abaixo.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{2x}$ ([veja vídeo](#)) (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(9x)}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}$

Dica: para o item (c), multiplique o numerador e o denominador por $(\cos(x) + 1)$

- 6) Algumas indeterminações do tipo $0/0$ podem ser resolvidas usando-se o artifício de multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado de um deles, conforme o exemplo abaixo

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4}.$$

Utilize a ideia acima para calcular os limites a seguir.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{2\sqrt{x} - 6}{x - 9} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{5 - \sqrt{4 + 3x}}{7 - x} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

Observação: vale a pena tentar o artifício acima no item (a) do exercício 4 para se convencer de que, naquele caso, o melhor caminho é mesmo a fatoração

- 7) Calcule cada um dos limites abaixo (veja [Texto 2](#)).

$$\begin{array}{lll} (a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - x^2 + x - 1} & (b) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} & (c) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \sin(x)}{1 - \cos(x)} \\ (d) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & (e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{2x + 3} - \sqrt{5}} & (f) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x - \pi)}{x - \pi} \\ (g) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 5x + 4}{|x - 1|} & (h) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} & (i) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{x - a} \end{array}$$

Dica: nos dois últimos, use a identidade $(x^n - y^n) = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$, para $n \in \mathbb{N}$

- 8) Se a posição de um carro no instante $t > 0$ é dada por $s(t)$, então a sua velocidade pode ser calculada a partir do seguinte limite (veja [vídeo](#))

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t + h) - s(t)}{h}.$$

Calcule a velocidade em cada um dos casos abaixo.

$$(a) s(t) = t^3 \quad (b) s(t) = \sqrt{t + 1} \quad (c) s(t) = \sin(t)$$

Dica: para o item (c), lembre que $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ e use o exercício 5

- 9) Suponha que a velocidade de um carro é $v(t)$, para $t > 0$. Usando a ideia do exercício acima, escreva a expressão da aceleração $a(t)$ em termos de um limite envolvendo a aceleração média. Em seguida, determine a aceleração no caso em que $v(t) = \cos(t)$.

Dica: para o cálculo do limite, lembre que $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ e use o exercício 5

- 10) Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dado $a \in I$, lembre que a *reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$* é a (única) reta que passa pelo ponto $(a, f(a))$ e tem inclinação igual a

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

quando o limite existe (veja [vídeo](#)). Neste caso, a equação da reta tangente $y = y(x)$ é dada por $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

Para cada uma das funções abaixo, determine a inclinação $f'(a)$ em um ponto genérico. Em seguida, calcule a equação da reta tangente no ponto indicado.

$$\begin{array}{ll} (a) f(x) = 2x^2, \text{ no ponto } (3, f(3)) & (b) f(x) = \frac{5}{x}, \text{ no ponto } (2, f(2)) \\ (c) f(x) = x|x|, \text{ no ponto } (0, f(0)) & (d) f(x) = |x|, \text{ no ponto } (0, f(0)) \end{array}$$

RESPOSTAS

- 1) Todas as afirmações são falsas. Para os dois primeiros itens um possível contra-exemplo é a função $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 2 \\ -3 & \text{se } x = 2 \end{cases}$. Para o terceiro $f(x) = \begin{cases} |x-2| & \text{se } x \neq 2 \\ -3 & \text{se } x = 2 \end{cases}$
- 2) (a) 5 (b) 1 (c) 2 (d) -2 (e) -1 (f) não existe
- 3) (b) os limites não existem, pois nos dois casos os limites laterais no ponto $x = 1$, apesar de existirem, são diferentes.
- (c) $h(x) = \begin{cases} x^4 + 3x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x + 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$, de modo que $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 4$.
- 4) (a) 2 (b) -2 (c) $1/3$
- 5) (a) 3 (b) $5/9$ (c) 0
- 6) (a) $1/3$ (b) $3/10$ (c) $1/2$
- 7) (a) $-1/2$ (b) $1/(2\sqrt{a})$ (c) 2 (d) 0 (e) $\sqrt{5}/2$
(f) 1 (g) -3 (h) na^{n-1} (i) $(1/3)a^{-2/3}$
- 8) (a) $v(t) = 3t^2$ (b) $v(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+1}}$ (c) $v(t) = \cos(t)$
- 9) A aceleração é dada pelo limite $a(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h}$. Se $v(t) = \cos(t)$, então a ela é dada por $a(t) = -\sin(t)$.
- 10) (a) $f'(a) = 4a$; reta tangente no ponto $(3, 18)$ é $y - 18 = 12(x - 3)$
(b) $f'(a) = -\frac{5}{a^2}$; reta tangente no ponto $(2, \frac{5}{2})$ é $y - \frac{5}{2} = -\frac{5}{4}(x - 2)$
(c) $f'(a) = \begin{cases} 2a, & \text{se } a \geq 0 \\ -2a, & \text{se } a < 0 \end{cases}$; reta tangente no ponto $(0, 0)$ é $y = 0$
(d) $f'(a) = \begin{cases} 1, & \text{se } a > 0 \\ -1, & \text{se } a < 0 \end{cases}$; a reta tangente no ponto $(0, 0)$ não existe porque os limites laterais de $(f(x) - f(0))/(x - 0)$, quando $x \rightarrow 0$ pela esquerda e pela direita, são diferentes. Observe contudo que, em qualquer outro ponto $(a, f(a))$, com $a \neq 0$, a função possui reta tangente. Ela tem equação $y = x$ se $a > 0$, e $y = -x$ se $a < 0$.